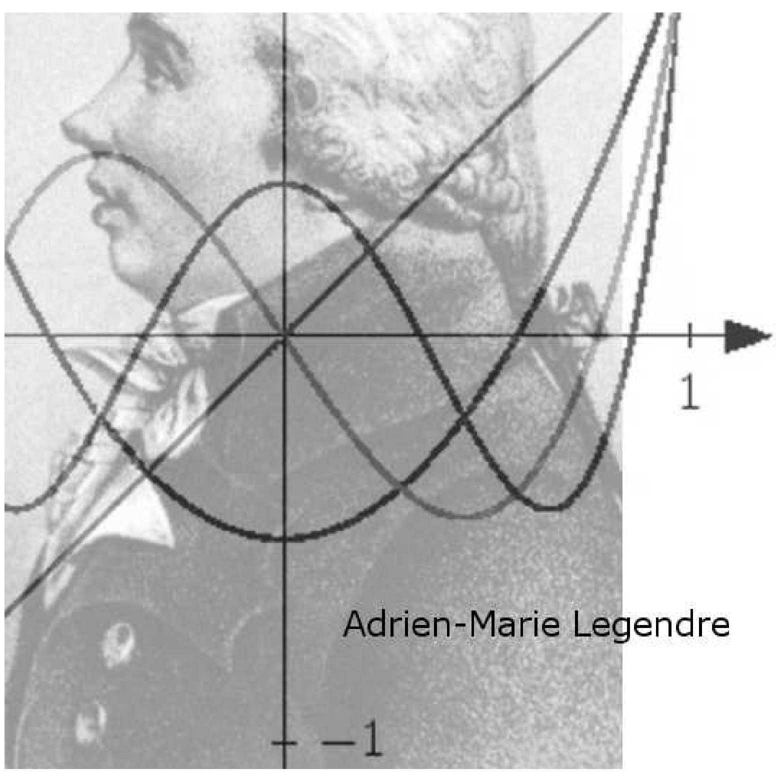
RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Legendrepolynome

Sabine Ringkowski

Ausarbeitung zum Vortrag im *Proseminar Analysis*
(Sommersemester 2009, Leitung Prof. Dr. Eberhard Freitag)



Zusammenfassung: Die folgende Ausarbeitung beschäftigt sich mit den Eigenschaften der sogenannten Legendrepolynome. Zunächst wird eine kleine Einführung zum Thema gegeben, in der auch der Namensgeber und Mathematiker Adrien-Marie Legendre vorgestellt werden soll. Danach werden die Legendrepolynome und deren wichtigste Eigenschaften unter anderem für die Anwendung in der Numerik und theoretischen Physik vorgestellt. In einem zweiten Teil werden die Legendrepolynome in einen Zusammenhang zu den bereits im ersten Semester in der Linearen Algebra erworbenen Kenntnissen gesetzt.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Adrien-Marie Legendre **3**

3 Definition und Veranschaulichung der Legendrepolynome **4**

4 Eigenschaften der Legendrepolynome **5**
4.1 Nullstellen 6

5 Orthogonalität **7**

6 Die Legendrepolynome als Lösungen der Legendredifferentialgleichung **11**
6.1 Allgemeine Lösung der Legendredifferentialgleichung 11
6.2 Beweis mit der Theorie der Linearen Algebra 13

7 Resümee **16**

8 Quellenangaben **17**

Abbildungsverzeichnis

3.1 Die ersten fünf Legendrepolynome 4

1 Einleitung

Die Legendrepolynome sind benannt nach Adrien-Marie Legendre (1752-1833), einem französischem Mathematiker, der sie in seiner Schrift *„Sur la figure des planetes“* 1784 erstmals erwähnte. In der Mathematik lassen sich einige interessante Eigenschaften der Legendrepolynome zeigen. Zudem kann eine schöne Verbindung zwischen Analysis und Linearer Algebra hergestellt werden.

Vor allem in der Quantenphysik und Mechanik, aber auch in der Numerik finden die Legendrepolynome auch praktische Anwendungen, auf die hier allerdigns nicht näher eingegangen werden wird.

2 Adrien-Marie Legendre

Adrien-Marie Legendre, der den größten Teil seines Lebens in Paris verbrachte, stammte aus einer wohlhabenden Familie, was es ihm ermöglichte bereits im Alter von 18 Jahren unabhängige Forschungen in der Mathematik und Physik zu betreiben.

Seine Arbeiten waren zu seinen Lebenszeiten sehr bedeutend, so wurde beispielsweise sein Buch *„Elements de géometrie“* fast ein Jahrhundert lang zum Standardwerk auf diesem Gebiet. Viele seiner Forschungen führten aber auch Ergebnissen, die heute anderen Mathematikern zugerechnet werden. So formulierte Legendre beispielsweise lange vor Gauß das quadratische Reziprozitätsgesetz - das allerdings auch bereits in den Schriften Eulers erwähnt wird. Da Legendre dieses nur teilweise bewiesen hatte, wird es damals wie heute Gauß zugerechnet, der als erster einen vollständigen Beweis dafür vorlegen konnte.

Das quadratische Reziprozitätsgesetz sollte nicht das einzige Ergebnis Legendres sein, das Gauß vervollständigen konnte, um dann die alleinige Anerkennung dafür zu bekommen. Auch im Zusammenhang mit der Methode der kleinsten Quadrate wurde Legendre dieselbige verweigert.

Dennoch ging er in die Geschichte als der Mathematiker ein, der unter anderem den ersten Beweis dafür erbrachte, dass π^2 irrational ist und der den Großen Fermatschen Satz für den Spezialfall $n = 5$ bewies.

Obwohl Zeit seines Lebens ein angesehener Mathematiker und Physiker, überwarf sich Legendre in späteren Jahren mit der Regierung und starb daraufhin 1833 in Armut.

Im Folgenden wollen wir uns also nun mit den Legendrepolynomen beschäftigen, die zweifelsohne Adrien-Marie Legendre zugeschrieben werden können.

3 Definition und Veranschaulichung der Legendrepolynome

Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten, die Legendre-Polynome herzuleiten oder zu erzeugen. Die wohl schnellste, wenn auch zunächst auf den ersten Blick aussageärmste bietet **Rodrigues' Formel**.

Definition 3.1 Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Das n-te Legendre-Polynome $P_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $P_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ ist durch

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}((x^2-1)^n)$$

definiert.

Wir wollen zunächst die ersten fünf Legendrepolynome betrachten:

$P_0(x) = 1$ $\quad$ $P_1(x) = x$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ $\quad$ $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$

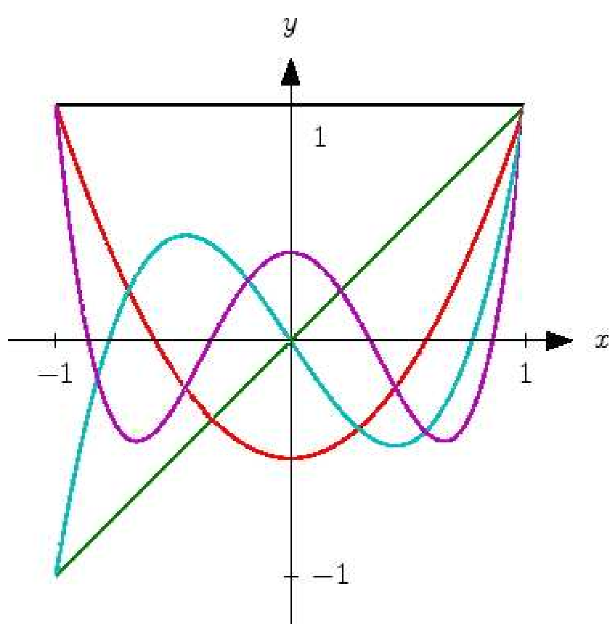


Abbildung 3.1: Die ersten fünf Legendrepolynome

4 Eigenschaften der Legendrepolynome

Defitition 3.0 und Abbildung 3.1 legen einige Vermutungen über grundsätzliche Eigenschaften der Legendrepolynome nahe:

Vorbemerkung 4.1 Leibnizregel: Seien f, g zwei n mal differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f \cdot g = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$$

Grundsätzliche Eigenschaften:

- P_n ist ein Polynom vom Grad n:
  $(x^2-1)^n$ ist ein Polynom vom Grad $2n$, das durch n-maliges Ableiten zu einem Polynom vom Grad n wird.

- $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ Multipliziert man $(x^2-1)^n$ aus, so erhält man ein Polynom, in dem nur gerade Exponenten vorkommen. Leitet man ein solches Polynom nun eine gerade Anzahl oft ab, erhält man wieder ein Polynom, in dem nur gerade Exponenten vorkommen, leitet man allerdings eine ungerade Anzahl oft ab, erhält man ein Polynom, in dem dann nur noch ungerade Exponenten vorkommen.

  P_{2n} hat also nur gerade Exponenten, P_{2n+1} hat nur ungerade Exponenten, die P_{2n} sind daher achsensymmetrisch zur y-Achse, die P_{2n+1} sind punktsymmetrisch um den Ursprung.

  Insbesondere gilt daher: $P_{2n+1}(0) = 0$

- $P_n(1) = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$
  Beweis:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{\mathrm{d}x^n}((x^2-1)^n) \\ &= \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{\mathrm{d}x^n}((x-1)^n \cdot (x+1)^n) \\ &= \frac{1}{2^n n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k}{\mathrm{d}x^k}(x-1)^k \cdot \frac{d^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}(x+1)^{n-k} \end{aligned}$$

  für x=1 werden alle Summanden bis auf k=0 Null. Man erhält

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n n!} \cdot n! 2^n \quad = \quad 1$$

$\blacksquare$

  Folgerung: $P_n(-1) = (-1)^n$

4.1 Nullstellen

Vor allem in der Numerik ist die folgende Eigenschaft der Legendrepolynomen von Bedeutung:

Lemma 4.2 Das n-te Legendrepolynom $P_n = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}((x^2-1)^n)$ hat im Intervall $[-1;1]$ genau n paarweise verschiedene Nullstellen.

Zum Beweis genügt es, $f(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$ zu betrachten.

Vorbemerkung 4.3 Für alle $i \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq i \leq n-1$ gilt: $f^{(i)}(x) = (x^2-1)^{n-i} \cdot P_i^*$, wobei P_i^* ein Polynom ist.

Der Vollständigkeit halber sei hier der Beweis durch Induktion nach i angegeben:

Induktionsanfang: i=0. Die Aussage ist wahr

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}
\frac{d^{i+1}}{\mathrm{d}x^{i+1}}(x^2-1)^n &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_i^* \cdot (x^2-1)^{n-i} \qquad \text{(Induktionsannahme)} \\
&= (P_i^*)' \cdot (x^2-1)^{n-i} + P_i^* \cdot 2x(x^2-1)^{n-i-1} \\
&= (x^2-1)^{n-(i+1)} \cdot P_{i+1}^*
\end{aligned}$$

mit $P_{i+1}^* = (P_i^*)' \cdot (x^2-1) + P_i^*$, ein Polynom.

$\blacksquare$

Als direkte Folgerung aus Vorbemerkung 4.3 ergibt sich:

Vorbemerkung 4.4 Sei $i \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq i \leq n-1$. Für $|x| = 1$ ist $f(x) = 0$.

Vorbemerkung 4.5 Satz von Rolle: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a,b) differenzierbar ist. Dann existiert eine Stelle ξ, sodass gilt:

$$f'(\xi) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

Dann können wir zeigen:

Bemerkung 4.6 Für $i \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq i \leq n$ hat $f^{(i)}$ mindestens i paarweise verschiedene Nullstellen im Intervall $(-1,1)$.

Der Beweis kann durch Induktion nach i geführt werden:

Induktionsanfang: $i = 0$. Die Behauptung ist wahr.

Induktionsannahme: Sei die Aussage für ein i mit $0 \leq i \leq n-1$ wahr.
$f^{(i)}$ hat also im Intervall $(-1, 1)$ i paarweise verschiedene Nullstellen
$\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_i$.

Induktionsschritt: Aus Vorbemerkung 4.4 folgt, dass f auf dem
Intervall $[-1, 1]$ dann also $i + 2$ paarweise verschiedene Nullstellen
$-1 = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_i < \xi_{i+1} = 1$ hat.

$f^{(i)}$ ist eine Polynomfunktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ und daher insbesondere auf dem Intervall $[-1, 1]$ stetig und differenzierbar. Daher können wir Vorbemerkung 4.5, den Satz von Rolle, anwenden:

Sei $0 \leq k \leq i$, $k \in \mathbb{N}_0$. Wendet man den Satz von Rolle auf die i+1 Intervalle $(\xi_0, \xi_1), (\xi_1, \xi_2), ..., (\xi_i, \xi_{i+1})$, deren Ränder jeweils die Nullstellen sind an, dann existiert in jedem dieser Intervalle (ξ_k, ξ_{k+1}) eine Stelle φ_{k+1} für die gilt:

$$f'(\varphi_{k+1}) = \frac{f(\xi_k) - f(\xi_{k+1})}{\xi_k - \xi_{k+1}} = 0$$

Da wir $i+1$ Intervalle haben, hat $f^{(i+1)}$ also im Intervall $(-1, 1)$ mindestens $i + 1$ Nullstellen $1 < \varphi_1 < \cdots < \varphi_{i+1} < 1$.

Insbesondere folgt daraus, dass $f^{(n)}$ mindestens n Nullstellen im Intervall $(-1, 1)$ hat.
Da $f^{(n)}$ ein Polynom vom Grad n ist (vgl. 4) hat $f^{(n)}$ aber höchstens n Nullstellen.

■

5 Orthogonalität

Definition 5.1 Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}[x]$:

Seien f,g $\in \mathbb{R}[x]$, zwei Funktionen $D \to \mathbb{R}$ mit D ein Intervall.
f, g heißen orthogonal auf [a,b], a,b $\in D$ und a<b, wenn

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

.

Definition 5.2 Die Norm von f, $\|f\|_2$ ist definiert als:

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x}$$

Satz 5.3 Die Legendrepolynome sind orthogonal auf [-1,1]:
Sei $n, m \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x = \delta_{n,m} \cdot \frac{2}{2n+1}$$

.

Beweis:
1) $n \neq m$: Setzt man Rodrigue's Formel für die P_n ein, erhält man:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}((x^2-1)^n) \cdot \frac{1}{2^m m!} \cdot \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}((x^2-1)^m)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{1}{2^m m!} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}((x^2-1)^n) \cdot \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}((x^2-1)^m)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Es genügt also zu zeigen, dass $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}((x^2-1)^n) \cdot \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}((x^2-1)^m)\ \mathrm{d}x = 0$.

Wir können o.B.d.A annehmen, dass $n > m$.

Lemma 5.4 Sei $i \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq i \leq n$. Durch i partielle Integrationen erhält man:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}((x^2-1)^n) \cdot \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}((x^2-1)^m)\ \mathrm{d}x = (-1)^i \cdot \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-i}}{\mathrm{d}x^{n-i}}((x^2-1)^n) \cdot \frac{\mathrm{d}^{m+i}}{\mathrm{d}x^{m+i}}((x^2-1)^m)\mathrm{d}x$$

Bemerkung 5.5 Das Lemma gilt insebesondere auch für n=m.

Beweis durch Induktion nach i:

Induktionsanfang: i=0: Die Aussage ist wahr.

Induktionsschritt:

$$
\begin{aligned}
I &= (-1)^i \cdot \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-i}}{\mathrm{d}x^{n-i}}((x^2-1)^n) \cdot \frac{\mathrm{d}^{m+i}}{\mathrm{d}x^{m+i}}((x^2-1)^m)\mathrm{d}x \qquad \text{(Induktionsannahme)} \\
&= (-1)^i \left(\left[\frac{\mathrm{d}^{n-(i+1)}}{\mathrm{d}x^{n-(i+1)}}((x^2-1)^n) \cdot \frac{\mathrm{d}^{m+i}}{\mathrm{d}x^{m+i}}((x^2-1)^m) \right]_{-1}^{1} \right) \\
&\quad - \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-(i+1)}}{\mathrm{d}x^{n-(i+1)}}((x^2-1)^n) \cdot \frac{\mathrm{d}^{m+i+1}}{\mathrm{d}x^{m+i+1}}((x^2-1)^m)\mathrm{d}x \\
&= \ 0 \ + \ (-1)^{i+1} \left(\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-(i+1)}}{\mathrm{d}x^{n-(i+1)}}((x^2-1)^n) \cdot \frac{\mathrm{d}^{m+(i+1)}}{\mathrm{d}x^{m+(i+1)}}((x^2-1)^m)\mathrm{d}x \right) \ ,
\end{aligned}
$$

da $\frac{\mathrm{d}^{n-(i+1)}}{\mathrm{d}x^{n-(i+1)}}((x^2-1)^n) = 0$ für $|x| = 1$ und $1 \leq i < n-1$

(Vorbemerkung 4.4) ∎

Wählt man dann $i = m+1 \leq n$, so erhält man

$$
(-1)^{m+1} \left(\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-(m+1)}}{\mathrm{d}x^{n-(m+1)}}((x^2-1)^n \right) \cdot \frac{\mathrm{d}^{2m+1}}{\mathrm{d}x^{2m+1}}((x^2-1)^{m+1})\mathrm{d}x) = 0 \ \ ,
$$

da $(x^2-1)^m$ ein Polynom vom Grad (2m) ist, das durch (2m+1) - maliges Ableiten 0 wird.

∎

$n = m$:
Für den Beweis von $n = m$ können wir bereits verwenden, dass gilt:

$$
I_{n,m} = (-1)^i \cdot \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-i}}{\mathrm{d}x^{n-i}}((x^2-1)^n) \cdot \frac{\mathrm{d}^{m+i}}{\mathrm{d}x^{m+i}}((x^2-1)^m)\mathrm{d}x
$$

Für $n = m$ und $i = n$ erhalten wir daraus:

$$
I_{n,n} = (-1)^n \cdot \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \cdot \frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}((x^2-1)^n)\mathrm{d}x
$$

Nun betrachten wir den rechten Faktor $\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}((x^2-1)^n)\mathrm{d}x$.
$(x^2-1)^n$ ist ein Polynom vom Grad 2n. Durch 2n-maliges gliedweises Ableiten werden also alle Summanden bis auf den, der ursrünglich vom Grad 2n ist, Null. Wir erhalten daher:

$$\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}((x^2-1)^n)\mathrm{d}x \;=\; (x^{2n})^{(2n)} = (2n)!$$

Für $I_{n,n}$ ergibt sich somit:

$$I_{n,n} = (-1)^n \cdot (2n)! \cdot \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \mathrm{d}x$$

Diesen Ausdruck kann man durch n partielle Integrationen weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned}
I_{n,n} &= (-1)^n \cdot (2n)! \cdot \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \mathrm{d}x \\
&= (2n)! \cdot \int_{-1}^{1} (1-x)^n \cdot (1+x)^n \mathrm{d}x \\
&= (2n)! \frac{n}{n+1} \cdot \int_{-1}^{1} (1-x)^{n-1}(1+x)^{n+1} \mathrm{d}x \\
&= \cdots \\
&= \frac{(2n)! \cdot n!}{(n+1) \cdot \cdots \cdot (2n)} \cdot \int_{-1}^{1} (1+x)^{2n} \mathrm{d}x \\
&= (n!)^2 \cdot \left[\frac{1}{2n+1} (1+x)^{2n+1} \right]_{-1}^{1} \\
&= (n!)^2 \cdot \frac{2^{2n+1}}{2n+1}
\end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P_n(x) P_n(x) \mathrm{d}x &= \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot (n!)^2 \cdot \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \\
&= \frac{2}{2n+1}
\end{aligned}$$

∎

Da P_n ein Polynom vom Grad n ist kann man leicht einsehen, dass sich jede Polynomfunktion vom Grad n, $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$, $Q(x) : [-1,1] \to \mathbb{R}$ als Linearkombination von Legendrepolynomen $P_i, i \in \mathbb{N}_0$ und $i \leq n$ mit Linearfaktoren $\lambda_i \in R$ schreiben lässt:

Man multipliziere zunächst den Koeffizienten der höchsten, d.h. n-ten, Potenz von $Q(x)$ mit $P_n(x)$ und ziehe das Ergebnis dann von $Q(x)$ ab. Dann fahre man induktiv

mit der nun höchsten verbleibenden Potenz und dem Legendrepolynom gleichen Grades fort.
Die Legendrepolynom sind außerdem linear unabhängig, da sie orthogonal sind. Sie bilden also eine Basis für den $\mathbb{R}[x]$.

Corollar. 5.6

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) \cdot Q(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

für alle Polynomfunktionen $\quad Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad $\leq n-1$.

Beweis: $Q(x)$ lässt sich als Linearkombination von $P_0, \cdots, P_{n-1}$ darstellen. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} P_n(x) \cdot Q(x) \, \mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} P_n(x) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P_k(x) \\ &= \lambda_0 \int_{-1}^{1} P_n(x) \cdot P_0(x) + \cdots + \lambda_{n-1} \int_{-1}^{1} P_n(x) P_{n-1}(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

∎

6 Die Legendrepolynome als Lösungen der Legendredifferentialgleichung

Satz 6.1 Das n-te Legendrepolynom $y(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}((x^2-1)^n)$ ist eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$y = (x^2 - 1) \cdot y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0, \tag{6.1}$$

der sogenannten Legendredifferentialgleichung.

Bevor wir obigen Satz beweisen werden noch eine Anmerkung zu den allgemeinen Lösungen der Legendredifferentialgleichung.

6.1 Allgemeine Lösung der Legendredifferentialgleichung

Die allgemeine Lösung der Legendredifferentialgleichung ist gemäß der Theorie der homogenen linearen Differentialgleichungen von der Form

$$y(x) = A \cdot P_n(x) + B \cdot Q_n(x),$$

wobei $P_n(x)$ und $Q_n(x)$ zwei linear unabhängige Funktionen sind.

Die $P_n(x)$ heißen Funktionen erster Art und sind unsere Legendrepolynome.
Die $Q_n(x)$ sind keine Polynome und heißen daher Funktionen zweiter Art oder auch Legendrefunktionen. Darauf wird hier allerdings nicht näher eingegangen werden.
Die Legendrepolynome als Polynomlösungen der Legendredifferentialgleichung sind eindeutig durch die Forderung $P_n(1) = 1$ festgelegt.

Nun zum Beweis des Satzes:

Man betrachtet folgende Gleichung, die sich aus der Kettenregel angewandt auf die rechte Seite ergibt:

$$(x^2-1)\cdot((x^2-1)^n)' = 2xn(x^2-1)^n$$

Leitet man (n+1) mal nach der Leibnizregel ab, erhält man:

$$(x^2-1)\cdot((x^2-1)^n)^{(n+2)} \;+\; (n+1)\cdot 2x\cdot((x^2-1)^n)^{(n+1)} \;+\; \frac{(n+1)n}{2}\cdot 2\cdot((x^2-1)^n)^{(n)}$$
$$=\; 2xn\cdot((x^2-1)^n)^{(n+1)} \;+\; (n+1)\cdot 2n\cdot((x^2-1)^n)^{(n)}$$

Wegen $(x^2-1)^{(n)} = 0$ für alle $n > 2$, fallen alle anderen Summanden auf der linken Seite weg.
Auf der rechten Seite gilt analog: $2x^{(n)} = 0$ für alle $n > 1$, daher fallen auch hier alle anderen Summanden weg.

Durch Vereinfachen ergibt sich:

$$(x^2-1)((x^2-1)^n)^{(n+2)} + 2x((x^2-1)^n)^{(n+1)} - n(n+1)((x^2-1)^n)^n \;=\; 0$$

Teilt man nun noch durch $(2^n n!)$ erhält man:

$$(x^2-1)\cdot\left(\frac{((x^2-1)^n)^{(n)}}{2^n\cdot n!}\right)^{(2)} + 2x\cdot\left(\frac{((x^2-1)^n)^n}{2^n\cdot n!}\right)^{(1)} - n(n+1)\cdot\left(\frac{((x^2-1)^n)^{(n)}}{2^n\cdot n!}\right) = 0$$

oder:

$$(x^2-1)\cdot P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0$$

∎

6.2 Beweis mit der Theorie der Linearen Algebra

Es gibt auch andere Möglichkeiten, diesen Beweis zu führen. Eine davon benutzt die Linearen Algebra und stellt so eine interessante Verbindung zwischen den beiden Teilgebieten der Mathematik her, die wir aus dem ersten Semester bereits kennen.

Man fasst die Legendredifferentialgleichung als lineare Abblidung
$F : V^i \to V^i$, $i \in \mathbb{N}$ auf, wobei V^i ein Untervektorraum des $\mathbb{R}[x]$, der Raum der Polynomfunktionen vom Grad $\leq i$ ist, sodass für $P(x) \in V^i$ gilt:

$$F_n : P(x) \mapsto (x^2-1)P''(x) + 2xP'(x)$$

Satz 6.1 wird dann zu

Satz 6.2 Sei $n \in \mathbb{N}_0, n \leq i$. Für das n-te Legendrepolynom $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}((x^2-1)^n)$ gilt:

$$F(P_n(x)) = n(n+1) \cdot P_n(x)$$

Grundsätzlich sucht man also Polynomfunktionen $P(x) \in V^i$ für die gilt:

$$F(P(x)) = n(n+1) \cdot P(x). \;\; n \leq i$$

Ein solches Problem nennt man auch Eigenwertproblem, da wir die zu den Eigenwerten $n(n+1)$ zugehörigen Eigenvektoren suchen. In unserem Fall bedeutet dies nun also zu zeigen, dass die $n(n+1)$ die Eigenwerte und die P_n die zugehörigen Eigenvektoren von F sind:

1) Wir zeigen zunächst, dass die n(n+1) Eigenwerte von F sind und die zugehörigen Eigenvektoren Grad n haben müssen.

Dazu verwenden wir ein Standardverfahren aus der Linearen Algebra - dies ist nun möglich, da wir unsere Funktion auf endliche Dimension beschränkt haben - und stellen F durch eine Matrix bezüglich der Basis $B = (1, x, x^2, \cdots, x^i)$ dar.

Man erhält:

$$M_B(F_n) = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 \cdot 2 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & i(i+1) \end{pmatrix}$$

Daraus kann man ablesen, dass die $n(n+1)$ für $n \leq i$ tatsächlich die Eigenwerte von F sind, deren zugehörige Eigenvektoren offensichtlich vom Grad n sein müssen.

2) Wir zeigen, dass die P_n tatsächlich die zu den Eigenwerten $n(n+1)$ zugehörigen Eigenvektoren sind.

Bemerkung 6.3 F ist bezüglich dem in 5.1 definierten Standardskalarprodukt eine selbstadjungierte Abbildung: Seien $P, Q \in V^n$. F ist eine selbstadjungierte Abbildung bezüglich dem Standardskalarprodukt $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\ \mathrm{d}x$, es gilt also:

$$\langle FP, Q\rangle = \langle P, FQ\rangle$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} FP(x)\cdot Q(x)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} \big((x^2-1)P''(x) + 2xP'(x)\big)\cdot Q(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} P''(x)\cdot(x^2-1)\cdot Q(x)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} P'(x)\cdot 2x\cdot Q(x)\mathrm{d}x \\
&= \Big[P'(x)\cdot(x^2-1)\cdot Q(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P'(x)\cdot\frac{d}{\mathrm{d}x}((x^2-1)\cdot Q(x))\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{-1}^{1} P(x)\cdot 2x\cdot Q(x)\mathrm{d}x \\
&= 0 - \int_{-1}^{1} P'(x)\cdot(x^2-1)\cdot Q'(x)\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} P'(x)\cdot 2x\cdot Q(x)\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{-1}^{1} P'(x)\cdot 2x\cdot Q(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_{-1}^{1} P'(x)\cdot(x^2-1)\cdot Q'(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis erhält man analog für $\int_{-1}^{1} P(x)\cdot FQ(x)\mathrm{d}x$, da der Ausdruck symmetrisch ist.
F ist also selbstadjungiert.

∎

Aus der Linearen Algebra ist bekannt:

Bemerkung 6.4 Zu jeder selbstadjungierten Abblidung S existiert eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von S.

Da F selbstadjungiert ist existiert also eine solche Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von F.
Über diese Orthonormalbasis wissen wir zusätzlich aus Beweisteil 1, dass sie ein System orthogonaler Polynome ist, bei dem jeder Grad vertreten ist.

Es existiert aber bis auf konstante Vorfaktoren nur genau ein System orthogonaler Polynome, bei dem jeder Grad vertreten ist. (vgl. [1], S.71)
Insbesondere ist also die Orthonormalbasis aus Eigenvektoren eindeutig.
Wir haben bereits gezeigt, dass die P_n Grad n haben (4) und orthogonal bezüglich dem hier verwendeten Skalarprodukt sind (5.3).

Aus (5.3) wissen wir außerdem: $\|P_n(x)\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$.
Dividiert man die P_n also durch $\|P_n\|$, erhält man genau die gesuchte Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von F. Die P_n sind also tatsächlich zu den Eigenwerte n(n+1) zugehörige Eigenvektoren.

∎

Als kleine Abschlussbemerkung sei hier noch erwähnt: Wendet man den Gram-Schmidt-Algorithmus zur Gewinnung einer Orthonormalbasis auf die Basis $B = 1, x, x^2, ...$ des $\mathbb{R}[x]$ an und multipliziert den n-ten Vektor der dadurch entstehende Orthonormalbasis mit $\|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$ erhält man wegen der Eindeutigkeit des Orthonormalsystems ebenfalls die Legendrepolynome.

7 Resümee

Wie wir gesehen haben, weisen die Legendrepolynome einige sehr nützliche Eigenschaften auf. Es bleibe dem interessierten Leser nun überlassen, sich über Anwendungen in der Numerik oder der theoretischen Physik sowie über weiter Eigenschaften der Legendrepolynome wie beispielsweise die Existenz einer erzeugenden Funktion oder Rekursionsformeln zu informieren.

8 Quellenangaben

Literatur

[0] Weselmann, Uwe: **Legendre Polynome**, *http://www.mathi.uni-heidelberg.de/t̃heiders/PS-Analysis/legendre.pdf, Stand 20.03.2009.*

[1] Courant, Richard/Hilbert, David: **Methoden der mathematischen Physik**, *Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 4.Auflage, 1993, S.70-74.*

[2] Boas, Mary L.: **Mathematical methods in the physical sciences**, *John Wiley & Sons, New York - Chichester - Brisbane - Toronto - Singapore, 2. Auflage, S.483-502.*

[3] Köckler, Norbert/Schwarz, Hans Rudolf: **Numerische Mathematik**, *Vieweg + Teubner Verlag, 7. Auflage, 2009, S.174-178.*

[4] Grübl, Gebhard: **Mathematische Methoden der Physik 1**, *ftp://ftp.uibk.ac.at/pub/uni-innsbruck/th-physik/Manuscripts/GG/MM1_SS07_VO.pdf, Stand 27.03.2009.*

[5] O'Connor, J.J./Robertson, E.F. **Adrien-Marie Legendre** http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Legendre.html, Stand 27.03.09

Abbildungen

Titelbild http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Legendre.html, Stand 27.03.09, veränderte Version

Abb. 3.1 http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs35/seite15.html, Stand 29.03.09, veränderte Version